CONCOURS SPECIAL DE RECRUTEMENT AUX GRANDES ECOLES 1978

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Les TROIS problèmes sont obligatoires et sans rapport entre eux

PROBLÈME I

A est l'ensemble de toutes les matrices réelles de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

1° Montrer que A est un espace vectoriel et de plus sous-anneau non intègre, non commutatif, de l'anneau des matrices carrées réelles d'ordre 3.

A quelles conditions M est-elle inversible? dans ce cas calculer M^{-1}; M^{-1} appartient-elle à A?

Montrer que les matrices M pour lesquelles $a = d$ forment un sous-anneau de A.

2° Un vecteur de l'espace vectoriel $E = R^3$ est noté (x_1, x_2, x_3). On appelle M_φ la matrice associée à un endomorphisme φ de E, dans la base canonique.

Montrer que pour que M_φ appartienne à A il faut et il suffit que :

a. Le plan P d'équation $x_3 = 0$ soit stable pour φ et,

b. La restriction de φ à P soit une homothétie.

3° Préciser les valeurs et vecteurs propres d'un endomorphisme dont la matrice appartient à A.

PROBLÈME II

On appelle solution de l'équation différentielle (E) :

$$(E) \qquad y'' \cos^2 \varphi - 2y' \cos \varphi \sin \varphi - 2y = 0$$

sur un intervalle réel ouvert J, toute fonction réelle f de la variable réelle φ, définie, continue, deux fois dérivable sur J, satisfaisant à la condition :

$$\forall \varphi \in J \qquad f''(\varphi) \cos^2 \varphi - 2f'(\varphi) \cos \varphi \sin \varphi - 2f(\varphi) = 0$$

où f' et f'' désignent les fonctions dérivées première et seconde de f.

1° *a.* Montrer que la fonction u, définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $u(\varphi) = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$, est solution de (E) sur I.

b. A toute fonction f définie sur I on associe la fonction g définie par $\forall \varphi \in I \quad g(\varphi) = \cos^2 \varphi f(\varphi)$. Former une équation différentielle (E_1) dont g est solution sur I si et seulement si f est solution de (E) sur I.

Trouver toutes les solutions de (E_1) sur I et en déduire celle de (E) sur I.

.../...

2° Soit l'application v de I dans $\mathbb{R}$, $v : \varphi \longmapsto x = \operatorname{tg} \varphi$.

A toute application f de I dans $\mathbb{R}$, on associe l'application F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $F = f \circ v^{-1}$.

a. Former une équation différentielle (E') dont F est solution sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f est solution de (E) sur I.

b. Chercher les fonctions développables en série entière, solutions de (E') sur un intervalle ouvert contenant 0. On constatera l'existence d'un polynôme solution et celle d'une série dont la somme est une fonction impaire que l'on précisera. On pourra utiliser soit les résultats du 1°, soit le développement de la fonction $x \longmapsto \operatorname{Arc\,tg} x$.

PROBLÈME III

Une suite réelle (u) est définie par le réel u_0 et la condition :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 4u_n - u_n^2$$

On dit que la suite (u) est périodique, de période p exactement $(p \in \mathbb{N},\ p \geqslant 2)$ lorsque : $u_p \neq u_{p-1}$ et $u_p = u_0$.

On dit que la suite (u) est presque constante lorsqu'il existe un entier naturel q tel que :

$$u_q \neq u_{q-1} \quad \text{et} \quad u_{q+1} = u_q.$$

On dit que la suite (u) est régulièrement convergente lorsqu'elle a une limite l $(l \in \mathbb{R})$ et que de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \neq l.$$

1° Montrer que si $u_0 < 0$ ou si $u_0 > 4$ la suite (u) est divergente.

2° *a.* On se limite à $0 \leqslant u_0 \leqslant 4$; montrer que dans ces conditions la suite (u) n'est pas régulièrement convergente.

b. On pose : $u_0 = 4 \sin^2 \alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$. Déterminer les suites (u) de période p exactement.

c. Montrer qu'il existe une infinité de valeurs de u_0 pour lesquelles la suite (u) est presque constante; quelles sont les valeurs possibles de la constante?

Donner un exemple de suite (u) presque constante pour laquelle :

$$u_3 \neq u_2 \quad u_4 = u_3$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail